Capítulo 2

Cinemática del Punto

Resolución del Problema 2.3

A priori, la opción más natural parece abordar el problema en coordenadas Cartesianas, dado que no existe un punto central ni un claro candidato a ubicar un polo donde fijar coordenadas polares. Si fijarmos el origen de las coordenadas Cartesianas en el punto A, y tal que el eje Ox contenga a los puntos A y B, las velocidades areolares respecto a los puntos A y B, respectivamente, se pueden expresar como sigue:

$$2\, v_{ar}^{A} = x\,\dot{y} - y\,\dot{x}$$
$$2\, v_{ar}^{B} = (x-a)\,\dot{y} - y\,\dot{x}$$

donde a es la distancia, en línea recta, entre los puntos A y B. Por lo tanto, si la relación de velocidades areolares debe permanecer constante, se puede afirmar que

$$\frac{v_{ar}^{A}}{v_{ar}^{B}} = \frac{x\,\dot{y} - y\,\dot{x}}{(x-a)\,\dot{y} - y\,\dot{x}} = k$$

donde k es constante. La expresión anterior se puede factorizar como sigue:

$$\dot{y}\;[k(x-a) - x] = \dot{x}\,(ky - y)$$

y se puede reordenar de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}y}{(k-1)\,y} = \frac{\mathrm{d}x}{(k-1)\,x - ka}.$$

Se trata de una ecuación diferencial de variables separadas, y por lo tanto, su integración es inmediata:

$$\ln y = \ln\left(x - \frac{ka}{k-1}\right) + \ln C$$

donde C es una constante de integración.

Por lo tanto, la trayectoria viene dada por la ecuación

$$y = C\,x - \frac{Cka}{k-1}$$

y es fácil ver que se trata de una trayectoria rectilínea.

Bla, bla, bla...

Resolución del Problema 2.7

Si la aceleracion normal es constante, de valor k, tenemos que $\gamma_n = \ddot{s} = k$, y mediante integración es inmediato obtener el módulo de la velocidad y el arco recorridos:

$$\dot{s} = k\,t, \qquad s = \frac{k\,t^2}{2}$$

donde las constantes de integración se anulan si tomamos como origen de arcos la posición inicial de la partícula, correspondiente a $\varphi = 0$, y sabemos que la partícula parte del reposo.

El siguiente paso natural es relacionar el parámetro longitud de arco, s, con el parámetro φ que parametriza la trayectoria. Diferenciando las ecuaciones paramétricas de la astroide obtenemos

$$\mathrm{d}x = -3a\,\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}y = +3a\,\sin^2\varphi\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

lo que nos permite relacionar el parámetro longitud de arco con φ

$$\mathrm{d}s = \pm\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \pm 3a\,\cos\varphi\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Donde el signo habrá de ajustarse en cada cuadrante, para que s crezca con φ. Para el primer cuadrante, por ejemplo, habrá que coger el signo positivo. La integración de esta ecuación proporciona

$$s = \frac{3}{2}a\,\sin^2\varphi$$

donde una vez más, la constante de integración se anula particularizando para las condiciones iniciales. Como ahora se conoce s tanto en función de φ, como en función de t, la ley horaria es inmediata:

$$\frac{3}{2}a\,\sin^2\varphi = \frac{k\,t^2}{2}$$

Así pues, las ecuaciones horarias se pueden obtener sustituyendo la ley horaria en la representación paramétrica de la trayectoria:

$$x = a\left(1 - \frac{kt^2}{3a}\right)^{3/2}, \qquad y = a\left(\frac{kt^2}{3a}\right)^{3/2}$$

La hodógrafa se puede obtener tanto a partir de las ecuaciones horarias, como a partir de la representación paramétrica:

$$\dot{x} = -3a\, \cos^2\varphi\, \sin\varphi\, \mathrm{d}\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = +3a\, \sin^2\varphi\, \cos\varphi\, \mathrm{d}\dot{\varphi}$$

donde $\dot{\varphi}$ se obtiene de la ley horaria:

$$3a\, \cos\varphi\, \sin\varphi\, \dot{\varphi} = kt = \sqrt{3ak\sin^2\varphi}$$

Así, la hodógrafa se puede expresar como

$$\dot{x} = -\sqrt{3ak}\, \cos\varphi\, \sin\varphi$$
$$\dot{y} = +\sqrt{3ak}\, \sin^2\varphi$$

Nótese que estas expresiones son sólo válidas para el primer cuadrante; para el resto de cuadrantes habría que revisar el criterio de signos, lo que proporciona los siguientes resultados para el segundo cuadrante, $\varphi \in [\pi/2, \pi]$:

$$x = -3a\left(\frac{kt^2}{3a} - 1\right)^{3/2}, \quad \dot{x} = +\cos\varphi\sqrt{3ak(2-\sin^2\varphi)}$$
$$y = +3a\left(2 - \frac{kt^2}{3a}\right)^{3/2}, \quad \dot{y} = -\sin\varphi\sqrt{3ak(2-\sin^2\varphi)}$$

los siguientes valores para el tercer cuadrante, $\varphi \in [\pi, 3\pi/2]$:

$$x = -a\left(3 - \frac{kt^2}{3a}\right)^{3/2}, \quad \dot{x} = -\cos\varphi\sqrt{3ak(2+\sin^2\varphi)}$$
$$y = -a\left(\frac{kt^2}{3a} - 2\right)^{3/2}, \quad \dot{y} = +\sin\varphi\sqrt{3ak(2+\sin^2\varphi)}$$

y los siguientes valores para el cuarto cuadrante, $\varphi \in [3\pi/2, 2\pi]$:

$$x = a\left(\frac{kt^2 - 3}{3a}\right)^{3/2}, \quad \dot{x} = +\cos\varphi\sqrt{3ak(4-\sin^2\varphi)}$$
$$y = -a\left(4 - \frac{kt^2}{3a}\right)^{3/2}, \quad \dot{y} = -\sin\varphi\sqrt{3ak(4-\sin^2\varphi)}$$

Nótese que la hodógrafa es discontínua porque la trayectoria es singular en los vértices de la astroide.

Resolución del Problema 2.9

La velocidad se puede obtener derivante la trayectoria respecto al tiempo

$$x = -a\, \sin\varphi\, \dot{\varphi}$$
$$y = \quad b\, \cos\varphi\, \dot{\varphi}$$

y la velocidad areolar constante proporciona la ligadura que permite obtener la ley horaria

$$2\, v_{ar} = k = x\dot{y} - y\dot{x} = ab\, \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{k}{ab}\, t$$

Las ecuaciones horarias se obtienen, por lo tanto, sustituyendo la ley horaria en la representación paramétrica de la trayectoria:

$$x = a\, \cos\left(\frac{kt}{ab}\right), \qquad y = b\, \sin\left(\frac{kt}{ab}\right)$$

y la hodógrafa resulta ser también una elipse:

$$\dot{x} = -\frac{k}{b}\, \sin\varphi, \qquad \dot{y} = \frac{k}{b}\, \cos\varphi$$

Resolución del Problema 2.12

La condición de que el vector aceleración corte constantemente al eje Oz, es una condición que no proporciona información sobre la coordenadas z (esto es, en qué punto se cortan el eje Oz y la recta soporte del vector aceleración), pero sí impone restricciones sobre las coordenadas x e y correspondientes a la intersección. Por lo tanto, es lícito hacer una proyección de los vectores posición, velocidad y aceleración sobre el plano Oxy, y estudiar el movimiento plano resultante, donde la condición impuesta por el enunciado se traduce en que la proyección del vector aceleración debe pasar por el origen situado en el punto O. En otras palabras, la proyección del movimiento sobre el plano Oxy es un *movimiento central.* Por lo tanto, las coordenadas x e y de la trayectoria satisfacen las propiedades de los movimientos centrales, y por lo tanto es posible afirmar que la velocidad areolar en el plano Oxy, respecto del origen O, es constante:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 2\, v_{ar} = c$$

donde c es la constante de áreas. Además, de las ecuaciones de la trayectoria, sabemos que $\dot{y} = 2\, x\, \dot{x}$, que sustituido en la ecuación de la velocidad areolar, proporciona la condición

$$x^2\, \dot{x} = C$$

La ecuación diferencial anterior puede integrase con facilidad, lo que proporciona la ley horaria del movimiento

$$\frac{x^3}{3} = ct + D$$

puesto que x actúa como parámetro de la representación paramétrica de la trayectoria. La constante D es una constante de integración. Sustituyendo el resultado anterior en las ecuaciones de la trayectoria, se obtiene las ecuaciones horarias:

$$x = [3\,(ct + D)]^{1/3}$$
$$y = [3\,(ct + D)]^{2/3}$$
$$z = [3\,(ct + D)]$$

Combinando la representación paramétrica de la trayectoria con la condicion $x^2\, \dot{x} = C$, se obtiene la hodógrafa del movimiento:

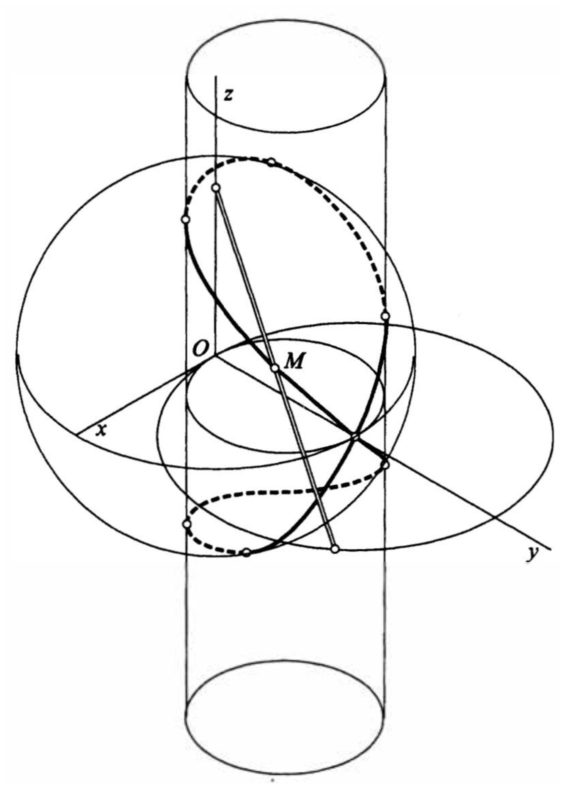
$$\dot{x} = \frac{c}{x^2}, \qquad \dot{y} = \frac{2c}{x}, \qquad \dot{z} = 3c.$$

Solución del Problema 2.13

1. Ecuaciones horarias del movimiento del punto medio M de la varilla:

$$x = \frac{1}{2}\,\sin(\omega t)$$
$$y = a\,\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$
$$z = a\,\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

2. Caracterizar geométricamente la trayectoria: La proyección M_1 de M recorre en Oxy una circunferencia de diámetro a, luego M se encuentra sobre un cilindro de revolución de base dicha circunferencia. Análogamente, el punto M está sobre una esfera de centro O y radio a por ser OM mediana del triángulo rectángulo AOB y por tanto igual a la mitad de la hipotenusa. El punto M se encontrará pues en la intersección de ambas superficies y recorrerá una curva de Viviani (ver figura).



3. Velocidad de M:

$$\mathbf{v} = \frac{a\omega}{2}\,\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + \frac{a\omega}{2}\,\sin(\omega t)\,\mathbf{j} - \frac{a\omega}{2}\,\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$v = \frac{a\omega}{2}\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

4. Valores máximos o mínimos de la velocidad de M, y posiciones en que se presentan: La velocidad mínima es $a\omega/2$ y se presenta cuando AB coincide con Oz. La velocidad máxima es $a\omega\sqrt{2}/2$ y se presenta cuando AB coincide con OC.

5. Caracterizar el movimiento de A: El movimiento de A es armónico de amplitud $4a$ y periodo $4\pi/\omega$ como se deduce de la expresión de OA en función del tiempo.

6. Aceleración de M:

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{a\omega^2}{2}\,\sin(\omega t)\,\mathbf{i} + \frac{a\omega^2}{2}\,\cos(\omega t)\,\mathbf{j} - \frac{a\omega^2}{4}\,\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$|\gamma| = \frac{a\omega^2}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

7. Aceleraciones tangenciales y normal en los instantes de los máximos y mínimos de velocidad: La aceleración tangencial de M vale

$$\gamma_t = \frac{\omega^2 a\,\sin(\omega t)}{8\sqrt{1+\sin^2(\omega t/2)}}$$

Tanto en los máximos como en los mínimos de v, es $\sin(\omega t) = 0$, luego en dichos puntos $\gamma_t = 0$. En dichos puntos, la aceleració normal vale:

$$\gamma_n = \gamma = \frac{a\omega^2}{2} \qquad \text{en los máximos de } v$$
$$\gamma_n = \gamma = \frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5} \qquad \text{en los mínimox de } v$$

8. Radio de curvatura de la trayectoria en estos instantes:

$$\rho = \frac{v_{\text{max}}^2}{\gamma_n} = a \qquad \text{en los máximos de } v$$
$$\rho = \gamma = \frac{v_{\text{min}}^2}{\gamma_n} = \frac{a}{\sqrt{5}} \qquad \text{en los mínimox de } v$$

Resolución del Problema 2.14

Se sabe que el movimiento es plano. De la primera condición se puede obtener la ley horaria:

$$v\cdot\gamma_t = k = v\,\dot{v} \qquad \rightarrow \qquad v\,\mathrm{d}v = k\,\mathrm{d}t$$

cuya integración proporciona

$$v = \dot{s} = \sqrt{2kt}.$$

A su vez, la velocidad se puede volver a integrar para obtener el parámetro longitud de arco

$$s = \frac{2}{3}\sqrt{2k}\,t^{3/2}.$$

En ambos casos, se han empleado las concidiones iniciales $s = \dot{s} = 0$ en $t = 0$.

La segunda condición proporciona información suficiente para obtener la trayectoria. En efecto, es fácil ver que

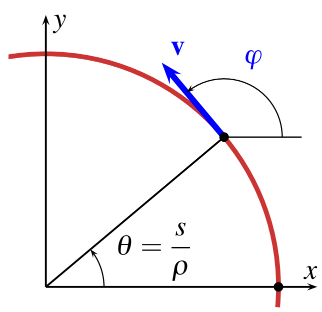
$$\gamma_n \cdot \gamma_t^2 = \frac{v^2}{\rho} \cdot \frac{k^2}{v^2} = h \qquad \rightarrow \qquad \rho = \frac{k^2}{h}.$$

Así pues, el radio de curvatura, ρ, es constante a lo largo del movimiento, y por lo tanto la trayectoria es una circunferencia. A partir de la posición inicial del punto, de coordenadas $(k^2/h, 0)$, sabemos que la trayectoria es una circunferencia con centro en el origen.

Para calcular la hodógrafa del movimiento, es preciso relacionar el módulo de la velocidad, v, y su argumento, φ, con algún parámetro, típicamente el tiempo t o el parámetro longitud de arco, s. El módulo de la velocidad es conocido, por lo que únicamente se necesita conocer su argumento. Al saber que la trayectoria es una circunferencia, es fácil ver que el vector velocidad es siempre tangente al a circunferencia, y por lo tanto el argumento de la velocidad vale

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{s}{\rho}\frac{\pi}{2}$$

donde θ es el ángulo polar que incida la posición angular del punto, y $s(t)$ es conocido, por lo que la hodógrafa queda determinada.



Como conocemos la relación entre s y v, es también posible expresar el argumento de la velocidad como función de su módulo, lo que proporciona la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{h\,v^3}{3\,k^3}.$$

Resolución del Problema 2.15

A partir del enunciado sabemos que la hodógrafa es una curva plana, al estar contenida en el plano $z = a\omega$. Sin embargo, esto no garantiza que la trayectoria deba ser plana. De hecho, de la condición anterior se desprende fácilmente el valor de z para cada instante de tiempo:

$$\dot{z} = a\omega \qquad \rightarrow \qquad z = a\omega t + a$$

donde se ha particularizado para la condición inicial $z = a$ en $t = 0$.

En coordenadas cilíndricas, la ecuación del cono resulta $z^2 = r^2$, lo que propociona dos posible soluciones, $z = \pm r$. La condición inicial $z > 0$ y $\dot{z} > 0$ permite resolver la ambigüedad, y así obtener el valor de la distancia radial al eje Oz como

$$r = z = a(1 + \omega t).$$

Asímismo, como el vector aceleración corta en todo momento el eje Oz, se puede inferir que la proyección de la trayectoria sobre el plano Oxy sigue un movimiento central con polo en el origen O, ya que la proyección de la aceleracion sobre este plano siempre pasa por el origen. Por lo tanto, es posible emplear las propiedades del movimiento central para resolver el movimiento. Parece conveniente hacerlo en coordenadas polares, que es además a lo que se reducen las coordenadas cilíndricas cuando se proyecta en el plano Oxy. Así, de la ley de áreas se obtiene:

$$r^2\dot{\theta} = c \qquad \rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{c}{a^2(1+\omega t)^2}.$$

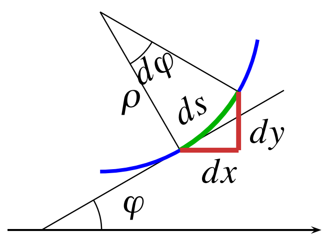
La constante de áreas se puede calcular fácilmente a partir de la condiciones iniciales, donde el valor del radio es $r = a$, y la velocidad angular es $\dot{\theta} = \omega$. Por lo tanto, de la ley de áreas se puede hallar el valor de $\theta(t)$ mediante integración:

$$\theta = \int_0^t \frac{\omega}{(1+\omega t)^2}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-1}{1+\omega t}\right|_0^t = \frac{\omega t}{1+\omega t}$$

Resolución del Problema 2.16

En los problemas planos en que hay que pasar de coordenadas intrínsicas (s, φ) a coordenadas Cartesianas, y viceversa, son útiles las siguientes relaciones geométricas:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}s\,\cos\varphi \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}s\,\sin\varphi \\
\mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\
\rho &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}
\end{aligned}$$



Volviendo al problema en cuestión, si la aceleración tangencial es constante, obtener el módulo de la velocidad es trivial:

$$\gamma_t = \ddot{s} = \omega^2 a \qquad \rightarrow \qquad v = \dot{s} = \omega^2 a\,t$$

así como el parámetro longitud de arco

$$s = \frac{1}{2}\omega^2 a\, t^2$$

donde se ha hecho uso de las condiciones iniciales $s_0 = \dot{s}_0 = 0$.

Conocidos v y s, es immediato obtener ρ a partir de la aceleración normal, ya que tenemos las siguentes identidades

$$\gamma_n = \omega^2\sqrt{2a\,s} = \omega^2\sqrt{2a\,\frac{1}{2}\omega^2 a\,t^2}$$
$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^4 a^2 t^2}{\rho}$$

Igualando términos, se obtiene que

$$\rho = a\omega\, t.$$

Y conocido ρ, el argumento del vector velocidad es inmediato:

$$\mathrm{d}s = \rho\, \mathrm{d}\varphi \qquad \rightarrow \qquad \omega^2 a\, t\ \mathrm{d}t = a\omega\, t\ \mathrm{d}\varphi$$

y la integración de la ecuación anterior proporciona:

$$\varphi = \omega t.$$

Ahora es posible pasar la solución a coordendas Cartesianas mediante las transformaciones introducidas anterioremente:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\,\cos\varphi = \omega^2 a\,t\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\,\sin\varphi = \omega^2 a\,t\,\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

cuya integración proporciona:

$$x = a\left(\cos(\omega t) + \omega t\,\sin(\omega t)\right)$$
$$y = a\left(\sin(\omega t) - \omega t\,\cos(\omega t)\right)$$

donde se han tenido en cuenta las condiciones iniciales $(a, 0)$.

La hodógrafa se obtiene derivando la expresión anterior de la trayectoria, después de lo cual es fácil eliminar la variable t para mostrar que la hodógrafa corresponde a una espiral de Arquímedes:

$$\rho = a\omega\,\theta$$

donde $\theta = \omega t$.

Solución del Problema 2.17

Ecuaciones de la trayectoria en coordenadas polares:

$$x = \frac{a}{\omega}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$y = \frac{a}{\omega}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\cos\theta\,\sin\theta}{2}\right)$$

Solución del Problema 2.18

1. Velocidad del punto en función de ρ:

$$v = \sqrt{\frac{8a^3 v_0^2}{\rho^3}}$$

2. Aceleraciones total, tangencial y normal, en función de ρ:

$$\gamma = -\frac{12a^3 v_0^2}{\rho^4}$$
$$\gamma_t = 6\sqrt{2}\,a^{5/2}v_0^2\,\frac{\sqrt{2a-\rho}}{\rho^4}$$
$$\gamma_n = 72\,\frac{a^5 v_0^4}{\rho^7}$$

3. Radio de curvatura de la trayectoria:

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{2a\,\rho}$$

4. Tiempo que tarda en llegar al polo O:

$$T = \frac{3}{4}\,\frac{\pi a}{v_0}$$

5. Hodógrafa del movimiento:

$$r = \frac{v_0}{\cos^3(\theta/2)} = \frac{v_0}{\cos^3\left(\frac{2\omega-\pi}{6}\right)}$$

Resolución del Problema 2.19

Como la hodógrafa se recorre en sentido de las agujas del reloj, el argumento de la velocidad, φ, es decreciente con el tiempo, y como el radio de curvatura es una magnitud esencialmente positiva, se tiene que

$$\rho = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$$

Imponiendo la condición cinemática del enunciado se tiene

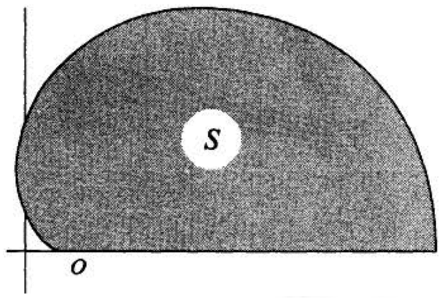
$$2\,\gamma_n = 2\,\frac{v^2}{\rho} = \omega v \qquad \rightarrow \qquad 2\,v = \omega\rho.$$

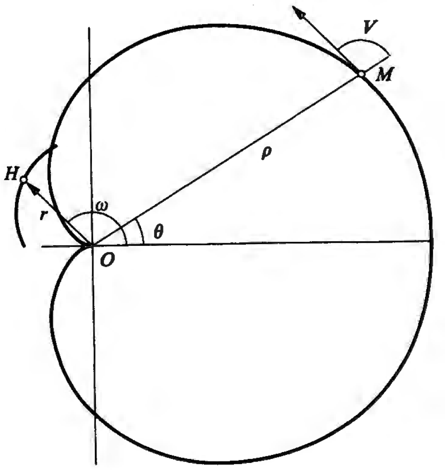
En esta ecuación se puede hacer aparecer el parámetro longitud de arco, s, de forma natural:

$$2\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$$

de donde $\mathrm{d}t$ se puede eliminar, quedando una ecuación diferencial que se puede integrar fácilmente. Sabiendo que en instante inicial $\varphi = \pi/2$, se obtiene:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}$$





que es una ley horaria.

El valor de la velocidad v en función de φ se obtiene directamente mediante criterios geométricos, sabiendo que la hodógrafa es una circunferencia de diámetro $2a\omega$ y centro en el punto $(a\omega, 0)$. Así pues:

$$v = 2a\omega\, \cos\varphi.$$

Combinando esta ecuación con la ley horaria, se tiene

$$v = 2a\omega\, \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

Para determinar las ecuaciones horarias es necesario expresar el elemeto longitud de arco en función del tiempo, luego:

$$\mathrm{d}s = v\ \mathrm{d}t = 2a\omega\, \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

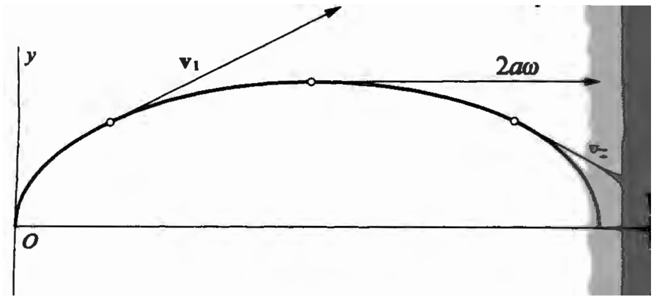
y se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}s\, \cos\varphi = 2a\omega\, \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\, \mathrm{d}t \\
&= a\omega(1 - \cos(\omega t))\, \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}s\, \sin\varphi = 2a\omega\, \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\, \mathrm{d}t \\
&= a\omega\, \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

e integrando las ecuaciones, teniendo en cuenta que en $t = 0$ es $x = y = 0$, queda:

$$\begin{aligned}
x &= a(\omega t - \sin(\omega t)) \\
y &= a(1 - \cos(\omega t)).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de la trayectoria corresponden a las de una *cicloide* engendrada por un punto de la circunferencia de radio a al rodar sobre el eje Ox, como se muestra gráficamente a continuación.



La ley horaria se puede expresar simplemente integrando el elemento de arco en función del tiemo, con lo que se obtiene

$$s = \int_0^t 2a\omega\, \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\ \mathrm{d}t = 4a\left(1 - \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right).$$

Resolución del Problema 2.20

Como la aceleración tangencial es un dato conocido, es posible obtener la velocidad a partir de ella:

$$\gamma_t = \dot{v} = 4t \qquad \to \qquad v = 2t^2 + 2/3.$$

Volviendo a integrar, es posible también hallar como ley horaria la variación del parámetro longitud de arco en función del tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad \to \qquad s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}.$$

Como la aceleración normal es paralela al plano Oxy, se desprende que toda componente vertical de la aceleración debe provenir de la aceleración tangencial; esto es, la acceleracion tangencial tendrá una componente vertical y otra paralela al plano Oxy. Por lo tanto, si se usan coordenadas cilíndricas, es fácil concluir las siguientes relaciones:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2}, \qquad \sin\phi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}, \qquad \cos\phi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$$

donde ϕ es el ángulo que la tangente de la trayectoria (o lo que es lo mismo, el vector velocidad) forma con el plano Oxy. Por lo tanto, la acceleración en la dirección del eje Oz viene únicamente condicionada por la componente vertical de la acceleración tangencial, esto es:

$$\ddot{z} = \gamma_t \cdot \sin\phi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dot{z}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

Como v y s son conocidas, sus diferenciales se pueden sustituir en la ecuación anterior, lo que proporciona

$$\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = \dot{z}\,\frac{4t\,\mathrm{d}t}{2(t^2 + 1/3)\,\mathrm{d}t}$$

La ecuación anterior es, por lo tanto, una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\dot{z}} = \frac{2t}{t^2 + 1/3}\,\mathrm{d}t$$

cuya integración es inmediata, y con los valores iniciales $z = 0$, $\dot{z} = 1/3$, en $t = 0$, se obtiene $\dot{z}(t)$ y $z(t)$, ambas funciones polinómicas del tiempo:

$$z = t^2 + \frac{1}{3}, \qquad \dot{z} = \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{3}\,t$$

Obsérvese que $z(t) = s(t)/2$, y por lo tanto, $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}s = \sin\phi = 1/2$, por lo que se obtiene que el ángulo $\phi = \pi/6 = 30°$ es constante.

Sea C_1 la proyección de la trayectoria sobre el plano Oxy. Sea ρ_1 su radio de curvatura y v_1 la velocidad con la que la proyección P_1 del punto la recorre. La velocidad v_1 se obtiene de inmediato a partir de la componente paralela al plano Oxy de la acceleración tangente:

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_t \cdot \cos\phi = 4t \cdot \frac{sqrt3}{2} \qquad \rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{3}\,(t^2 + 1/3)$$

donde se ha empleado la condición inicial $v_1 = \sqrt{3}/3$ en $t = 0$. Integrando de nuevo, se puede hallar la longitud de arco de la curva C_1, como sigue

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad s = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(t + t^3).$$

La aceleración normal, que es paralela al plano Oxy, proporciona el radio de curvatura

$$\gamma_n = 2 = \frac{v_1^2}{\rho_1} \qquad \rightarrow \qquad \rho_1 = \frac{v_1^2}{2}.$$

Sobre la ecuación anterior, pueden aplicarse los siguientes cambios de variable:

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\varphi}, \qquad v_1 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}$$

lo que permite re-escribir la expresión dando lugar a una ecuación diferencial de la que se puede obtener φ

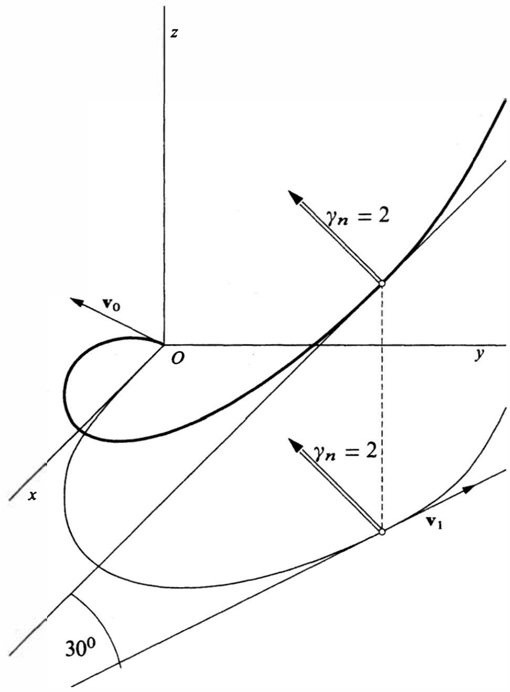
$$\rho_1 = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_1}{2}\,\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{v_1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3}\,(t^2 + 1/3)}.$$

Integrando la ecuación anterior con la condición inicial $\varphi = 0$ en $t = 0$, se obtiene

$$\varphi = 2\,\arctan\left(\sqrt{3}\,t\right) \qquad \rightarrow \qquad \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{3}\,t.$$



Finalmente, si $\mathrm{d}s_1$ es el elemento de arco de la proyección, se ha de verificar que:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s_1\,\cos\varphi = v_1\,\mathrm{d}t\,\cos\varphi$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}s_1\,\sin\varphi = v_1\,\mathrm{d}t\,\sin\varphi$$

y como

$$\cos\varphi = \frac{1 - \tan^2(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)} = \frac{1 - 3t^2}{1 + 3t^2}$$
$$\sin\varphi = \frac{2\,\tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)} = \frac{2\sqrt{3}\,t}{1 + 3t^2}$$

sustituyendo, queda

$$\mathrm{d}x = \frac{1 - 3t^2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$$

e integrando las expresiones a partir de las condiciones iniciales, las ecuaciones horarias quedan finalmente:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(t - t^3)$$
$$y = t^2$$
$$z = \frac{1}{3}\,(t + t^3)$$

Nótese que la trayectoria corresponde a una hélice, lo cual se podia intuir a partir de las condiciones del problema, puesto que las hélices tienen la normal principal paralela a un plano, en ese caso el plano Oxy.